2023 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組　成果報告表單

題目名稱：文「一」復興-探索一元硬幣與外接正方形邊長的關係

一、摘要

本研究主要是在研究一元硬幣和外接正方形邊長的關係，並且利用到一些我們目前學到的或未來會學到的數學相關知識來計算出他們的近似值。在我們算出每個不同數量圓形所計算出的圓形半徑後，我們會求出它們的比例。未來如果有機會，我們會換成計算外接長方形的長和寬與圓形的關係，這樣就能應用到生活上。

二、探究題目與動機

在現代疫情的影響下，我們在家常常會閒閒沒事做，於是就會開始做做餅乾、蛋糕等烘焙食品，但是不知道大家有沒有想過，當我們把這些食品拿進烤箱烤的時候，我們有沒有可能把烤盤上的東西放到最滿，而不因隨意擺放而浪費空間，讓時間和產能盡到最大的利益。在一次的數學課中，老師提到了一元硬幣跟正方形的關係，於是我們就連想到了這件事，希望能夠讓大家在最短的時間內吃到最多的餅乾。

三、探究目的與假設

一、找出正方形裡不同圖形數量的最佳排法

二、求出正方形的邊長和正方形裡圓形半徑的關係

三、利用正方形的邊長和正方形裡圓形的半徑的關係求出一個可以套用在不同

　　形數量的公式

四、探究方法與驗證步驟

研究設備器材:

我們使用一元硬幣來當圓形，因為 1 元硬幣每個面積都固定，所以我們用一元硬幣來找出每個倍數正方形的最佳排法，然後再進一步的在紙上算出過程及結果，就能求出答案。

一元硬幣很多個

我們是用雷切機切木板來切出我們需要的模型，途中經過很多次尺寸的修改，到了最後，終於找出最完美的尺寸，並且套用在模型上。

單、雙倍數正方形模型一份

研究過程及方法:

我們用畢氏定理及和根號相關的數學觀念，把以下 2 到 15 個圓形的過程及答案算了出來

設圓的半徑為 r

正方形裡放 2 個圓關係式:

$r^2+r^2=2r^2$

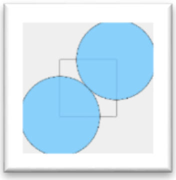
$\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$

$\sqrt{2}r*2+2r=2\sqrt{2}r+2r$

$=2(\sqrt{2}r+r)$

$\therefore \sqrt{8}=2(r+\sqrt{2}r)$

$r=2-\sqrt{2}$



設半徑為 r

正方形裡放 3 個圓關係式:

$\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$

利用正三角形邊長比例

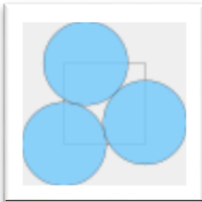
正三角形高為$\sqrt{3}r$

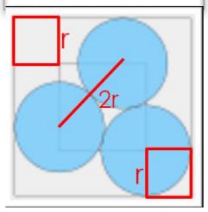
$(2r)^2=(\sqrt{2}r)^2+(\sqrt{2}r)^2$

$\sqrt{2}r+\sqrt{2}r+r+\sqrt{3}r=\sqrt{8}$

$\therefore(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)r=\sqrt{8}$

$r=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}=8-5\sqrt{2}-3\sqrt{6}+4\sqrt{3}$



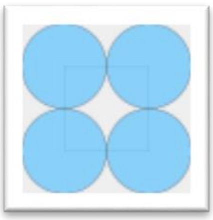


設半徑為 r

正方形裡放 4 個圓關係式:

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$



設半徑為 r

正方形裡放 5 個圓關係式:

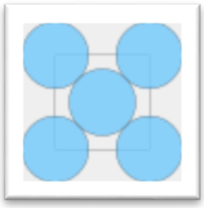
$r^2+r^2=2r^2$

$\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$

$\sqrt{2}r*2+4r=2\sqrt{2}r+4r$

$\therefore \sqrt{8}=2\sqrt{2}r+4r$

$r=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}+4}=\sqrt{2}-1$



設半徑為 r

正方形裡放 6 個圓關係式:

設兩個未知數 a,b

$(2a)^2+(2b)^2=(4r)^2$

$a^2+b^2=(2r)^2$

2=2b+2r

2=3a+2r

推 $b=\frac{3}{2}a$

$a^2+9/4\ a^2=(4r)^2$

$13/4\ a^2=(4r)^2$

$a^2=(4r)^2*4/13$

$a^2=(16/13)r^2$

$a=\sqrt{(\frac{16}{13})r^2}=4r\sqrt{\frac{1}{13}}$

再把 a 的解帶入 2=3a+2r

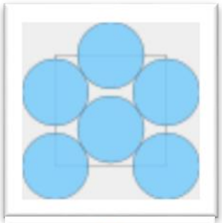
$2=3(4r\sqrt{13}/13)+2r$

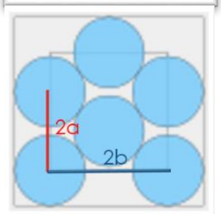
$2=12r\sqrt{13}/13+2r$

再把 $2=12r\sqrt{13}/13+2r$ 化簡

並有理化

得 $r=\frac{9}{(16r-10)}$





設半徑為 r

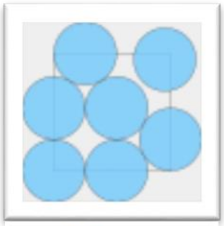
正方形裡放 7 個圓關係式:

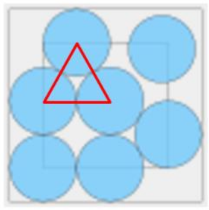
利用正三角形邊長比例

正三角形高為$\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{3}r+4r=2$

r=$\frac{2}{\sqrt{3}+4}$= $\frac{2\sqrt{3}-8}{-13}$





設半徑為 r

正方形裡放 8 個圓關係式:

$r^2+\ r^2=2r^2$

$\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$

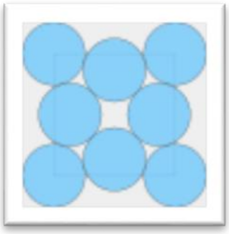
利用正三角形邊長比例

正三角形高為$\sqrt{3}$

$r+\sqrt{2}r+\sqrt{3}r=1^2$

$\therefore(1+\ \sqrt{2}+\ \sqrt{3})r=1$

r=$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$=$\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$

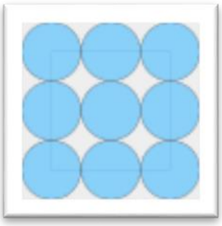


設半徑為 r

正方形裡放 9 個圓關係式:

$\frac{2}{6}\ =\ \frac{1}{3}$

r= $\frac{1}{\ }$



設半徑為 r

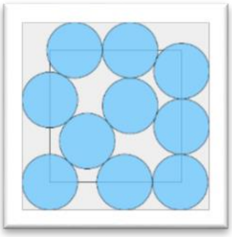
正方形裡放 10 個圓關係式:

$4r^2+\ 4r^2=\ 8r^2$

$\sqrt{8r^2}=\sqrt{8}r$

$\therefore \sqrt{8}r+4r=2$

r=$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$



設半徑為 r

正方形裡放 11 個圓關係式:

$r^2+\ r^2=2r^2$

$\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$

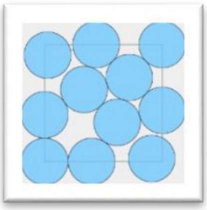
利用正三角形邊長比例

正三角形高為$\sqrt{3}$r

$(2r)^2+\ (2r)^2=8r^2$

$\sqrt{8r^2}=2\sqrt{2}r$

$2\sqrt{2}r/2=\sqrt{2}r$



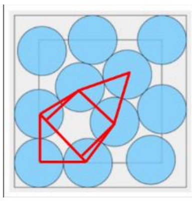
$(2r)^2-(\sqrt{2}r-r)^2=4r^2-[(\sqrt{2}-1)r]^2$

$=(1+2\sqrt{2})r^2$

$\sqrt{(1+2\sqrt{2})r^2}=(\sqrt{1+2\sqrt{2}})r$

$2r^2+\ 4r^2=\ 6r^2$

$\sqrt{6r^2}=\sqrt{6}r$



$\sqrt{8}=2\sqrt{2}r+2r+\sqrt{3}r+\sqrt{2}r+(1+\sqrt{2\sqrt{2}})r$

$\sqrt{8}=r(3\sqrt{2}+3+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{2}})$

r=$\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{2}+3+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{2}}}$= -0.6-0.6$\sqrt{3}$+0.8$\sqrt{2}$+0.6$\sqrt{6}$

設半徑為 r

正方形裡放 12 個圓關係式:

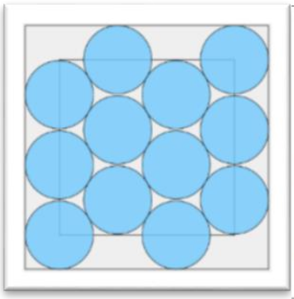
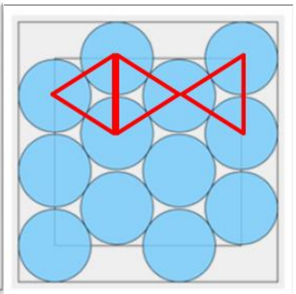
$4r^2 - r^2 = 3r^2$

$\sqrt{3r^2} = \sqrt{3}r$

$3^* \sqrt{3}r+2r=r(3\sqrt{3}r+2)$

$r(3\sqrt{3}r+2)=2$

$r= \frac{2}{3\sqrt{3}r+2} = \frac{2(3\sqrt{3}-2)}{23}$

設半徑為 r

正方形裡放 13 個圓關係式:

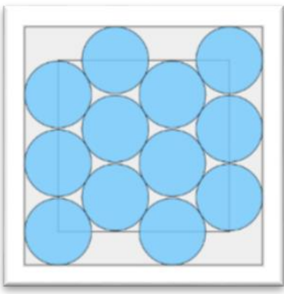
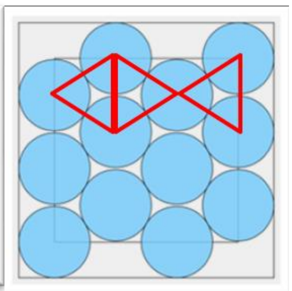
$4r+\sqrt{3}r+ \sqrt{3}r=2$

$4r+2\sqrt{3}r=2$

$r(4+2\sqrt{3})=2$

$r=\frac{2}{4+2\sqrt{3}}$

$r=2-\sqrt{3}$

設半徑為 r

正方形裡放 14 個圓關係式:

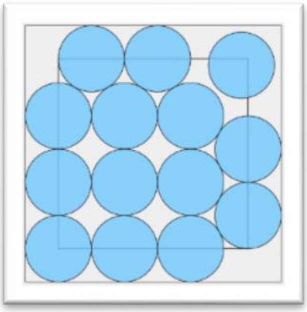
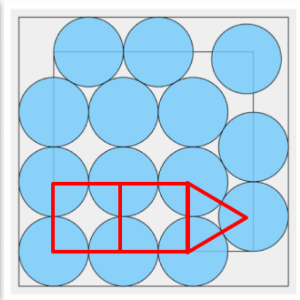
$4r+r+\sqrt{3}r+r=2$

$6r+ \sqrt{3}r=2$

$r(6+\sqrt{3})=2$

$r=\frac{2}{6+\sqrt{3}}$

$r= \frac{2(6-\sqrt{3})}{33}$

設半徑為 r

正方形裡放 15 個圓關係式:

$r+\sqrt{3}r + 2r + \sqrt{3}r+r+$

$\sqrt{8}r$

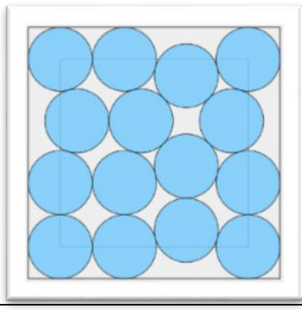
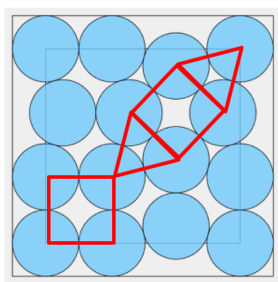
$= \sqrt{8}$

$4r+2\sqrt{3}r+ \sqrt{8}r= \sqrt{8}$

$r(4+2\sqrt{3}+ \sqrt{8})= \sqrt{8}$

$r=\frac{2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

$r= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

五、結論與生活應用

研究結果:

我們把上面的研究過程及方法求出近似值，依照每個不同數量的圓形整理出以下的表格。

圓的數量	圓的半徑近似值
2 個	≒0.586
3 個	≒0.509
4 個	=0.5
5 個	≒0.414
6 個	≒0.352
7 個	≒0.349
8 個	≒0.341
9 個	≒0.333
10 個	≒0.293
11 個	≒0.285
12 個	≒0.278
13 個	≒0.268
14 個	≒0.259
15 個	≒0.254

結論:

在我們做完此研究後，發現到當圓形數量越少，圓的半徑就會以大概 0.01cm 的減少，但有些有例外，就像是 9 跟 10 的半徑就差了 0.04 之多，所以這還是一個不固定的數值。最後，我們發現如果想要在正方形裡放上最多的一元硬幣，會有很多種排法，而這些排法也有一點規律，那就是如果我們想要排出最多個圓形，我們首先不能先將靠近牆壁的排滿，我們要先觀察我們是否可以先在左下角排上一個由四個或五個圓形所組成的正方形或叉叉形，接下來就是思考可不可以在上面或右邊用圓形排成的直線，就幾乎能滿足每個倍數正方形能排出的最多圓形。

討論:

一、在研究過程中，我們需要使用雷切機切出單、雙倍數正方形模型，但我們在開始切前，會調整雷切機的速度與光強，速度越慢、光強越強，就比較可以切透木板，而速度尤其影響較多，所以我們不斷調整每次切的功率，讓我們可以在最短的時間內拿到有切透的模型。而且木板總類不同和機器的老舊也會影響到有沒有成功切透，而最後我們得出的最佳功率是光強 60 速度 8。

二、我們在計算圓形和外接正方形邊長的關係時，有遇到一些目前的數學課還沒有上到的相關數學知識，因此我們就會沒有辦法把它給解出來，這時我們會上網查詢相關的資料，並且把資料應用到要計算的數字上，就可以解出來，並且還可以先修後面要學到的知識。

三、在做完此研究後，我們發現到我們的動機和我們的研究內容有點不相符，因為我們在研究的是一元硬幣和外接正方形邊長的關係，但我們的研究動機是在講烤盤，而烤盤大多都是長方形，很少有正方形的，所以會有一點不同，後來我們思考過長方形可以用來當我們之後的延伸研究，真正找出能應用到生活上的數學知識。

參考資料

https://www.youtube.com/watch?v=r4dPzET1YWw(關於排法的關係)

https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_packing_in_a_square(維基百科)