

2023 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

普高組 成果報告表單

題目名稱：改弦更張——揭開弦樂器音高背後的科學

一、摘要

「改弦更張」這句成語字面上的原意是為樂器換上新的琴弦。弦樂器彈奏久了，琴弦會變鬆導致音高失準，這時就得調音。在成長經驗中，我們都知道弦愈緊音調愈高、反之則愈低，但我們能否找出一條數學關係式更精準地描述弦張力與振動頻率的關係？

在本探究活動中，我們使用唾手可得的釣魚線、寶特瓶，搭建出不同張力的弦，透過手機 App 測量其振動頻率，以本活動採用的釣魚線為例，得出 $f = 4.3167 F^{0.5712}$ 的關係式，其中 f 為弦振動頻率， F 為張力，呼應弦振動頻率與弦張力平方根成正比的推測。由於本探究活動採用的器材相當簡單易得，可根據此結果計算弦以音階標準頻率所需的張力，製作弦樂器設計教學演示活動或教材。

二、探究題目與動機

紙杯做的傳聲筒是每個人都玩過的童年玩具，也知道線必須拉直、拉緊才能讓聲音順利傳播，可見張力會影響繩子的振動，聯想到弦樂器如鋼琴、吉他，琴弦愈緊，音調愈高，反之則愈低彷彿是常識，但我們希望能為此進行定量的探討，以數學關係式更精準地描述弦張力與振動頻率的關係。

三、探究目的與假設

一、目的：以數學關係式更精準的描述弦張力與振動頻率的關係。

二、假設（提出模型）

$f \propto F^{\frac{1}{2}}$ ，其中 f 為撥弦所發出的聲音之頻率， F 為弦張力。

三、推導過程

（一）弦上波速與弦張力的關係

設 Δl 為很長的弦線上的一小段，由於兩端拉力 F 相等、與半徑 R 的夾角也相等皆為 θ （這裡 θ 趨近於零），合力會指向圓心視為向心力，其量值為 $2F \sin \theta \approx 2F\theta$ ，如圖一。

假設線密度為 μ 、弦線段的質量 $m = \mu \Delta l = \mu 2R\theta$ 。根據牛頓第二運動定律得

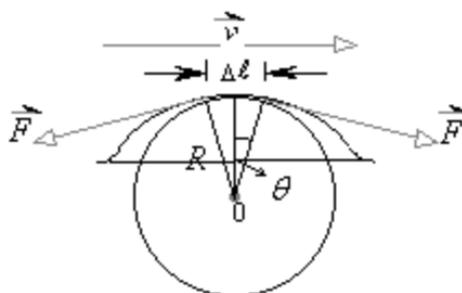
$$\text{弦上波速 } v = \frac{2F \sin \theta}{\mu \Delta l} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}。$$

（二）弦上波傳遞頻率與弦張力的關係

波在弦上傳遞時與來自端點的反射波相遇時會產生共振駐波，弦線 2 端點為固

定不動的節點，設有 n 段駐波，弦長 $l = n \times \lambda/2$ ，即半個波長的整數倍。

由波速 $v = \lambda f$ ，得頻率 $f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{n}{2\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ 。



圖一（取自參考資料一）

（三）弦如何振動

弦上有 n 段駐波，其中 n 可以是 1、2、3、……依此類推，每種 n 值會分別使弦表現出一種振動頻率並振動空氣發聲，實際上撥弦時弦的振動方式正是 n 種振動模式的疊加，其中 $n = 1$ 時稱為基音，是人耳判斷音高的依據；其餘皆稱為泛音，不同材質的泛音會有不同的音量分佈，這是不同樂器演奏同一音高人們卻能辨識出不同音色的原因，因此這裡我們以基音作為實驗的討論對象。

由於 n 固定，並假設實驗時線密度不變，得 $\frac{F}{\lambda^2} = \mu f^2$ ，即張力與波長平方的比值為一常數，於是推導出 $f \propto F^{\frac{1}{2}}$ 此一頻率與弦張力之關係式。

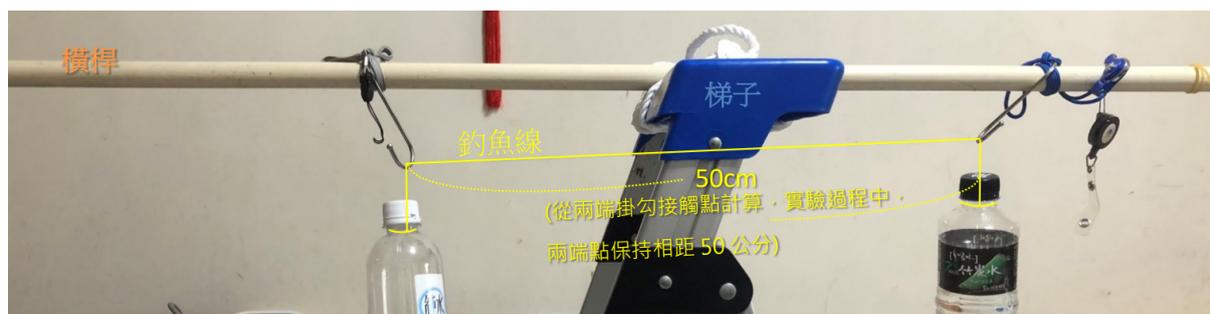
四、預期結果

弦張力與撥弦時振動頻率的關係應符合 $f \propto F^{\frac{1}{2}}$ ，而 f 為撥弦所發出的聲音之頻率 F 為弦張力。

四、探究方法與驗證步驟

一、實驗器材與擺設

釣魚線、手機、橫桿、S 型掛勾 x 2、2000 mL 寶特瓶 x 2、水。擺設方式如圖一。



圖二、實驗裝置擺設

二、如何測量弦振動頻率

前面提到弦的振動方式是好幾種頻率的疊加，而我們以決定音高的基音作為討論對象，那要怎麼測量弦的振動頻率呢？這裡我們使用快速傅立葉變換 App 進行頻譜分析以了解聲音的頻率分佈，而基音會是頻譜圖上數個峰值中頻率最低者，如圖四。



圖 三、背景雜訊頻譜圖

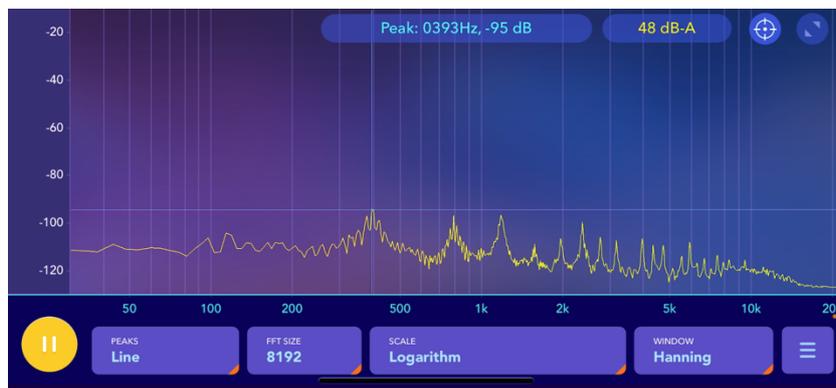


圖 四、弦振動發聲之頻譜圖（基音為 393Hz）

三、實驗步驟

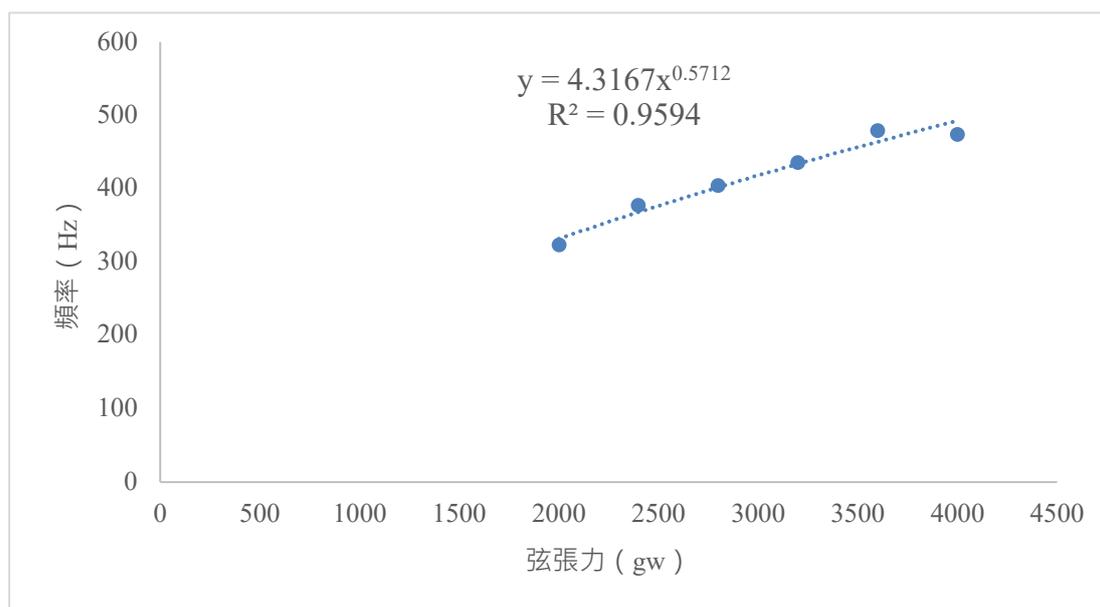
1. 將 2 個 S 型掛勾固定於橫桿上。
2. 分別在 2 個寶特瓶中裝水。對於每個實驗組，使每個水瓶總重皆為 1000 gw 至 2000 gw，以 200 gw 遞增。
3. 在釣魚線兩端綁上水瓶懸吊於掛鉤上。
4. 微調掛鉤位置使掛鉤間釣魚線長為 50 cm。
5. 如同撥動吉他弦般撥動釣魚線，使其振動發出聲音。
6. 以手機 App 測量其頻率，重複 3 次並記錄在表一。

四、實驗數據紀錄

表一、不同弦張力下播弦時其發聲的頻率 (3 次平均)

繩張力 (gw)	2000	2400	2800	3200	3600	4000
頻率 (Hz)	323	377	404	436	479	474

五、實驗數據與分析



圖五、不同繩張力與其撥弦時發聲頻率之關係圖

觀察圖五可以發現，弦張力愈大，其振動的頻率愈高。以 Excel 繪製乘冪趨勢線進行分析得出頻率與弦張力的數值關係式為 $f = 4.3167 F^{0.5712}$ ，而相關係數為 0.9594。呼應原先假設的 $f \propto F^{\frac{1}{2}}$ 。

五、結論與生活應用

本實驗探討弦張力與撥弦時其振動頻率的關係，實驗結果顯示弦張力愈大，弦振動頻率愈高，以本實驗中 0.5 m 釣魚線而言，其振動頻率為 4.3167Hz 乘上弦張力 (gw) 的 0.5712 次方。

一、生活應用

以本次實驗的 0.5 m 釣魚線而言，我們可以根據實驗得出的頻率與弦張力數值關係式 $f = 4.3167 F^{0.5712}$ ，配合表二中的音階標準頻率計算弦以該頻率為基頻振動時所需的張力可得表三，嘗試自行打造出弦樂器，也能作為教學的演示教材。

表 二、C 大調音階頻率對照表 (取自參考資料二)

唱名	Do	Re	Mi	Fa	So	La	Si	Do
	(中央 C)							
頻率 (Hz)	262	294	330	349	392	440	494	524

表 三、本實驗中 0.5 m 釣魚線以各頻率振動所需張力

唱名	Do	Re	Mi	Fa	So	La	Si	Do
	(中央 C)							
所需張力 (gw)	1324	1619	1982	2187	2680	3280	4017	4454

二、實驗檢討

本實驗假設實驗過程中釣魚線始不會產生形變且每次實驗檢查掛鉤間弦線為 50 cm，然而實務上不能保證弦隨著兩端所掛重物增加長度仍維持不變，這或許會造成線密度的改變而提高實驗結果的不確定度。

三、未來展望

未來再次實驗時能注意實驗操作的時間，避免重物長時間懸掛於弦上造成不可逆的形變，甚至對於每個實驗組重新剪取所需線材，以提高實驗精度。

參考資料

1. 中興大學物理系-普通物理實驗室，2022 年 6 月 13 取自
http://experiment.phys.nchu.edu.tw/EZphysics/ex_d.htm
2. B. H. Suits (1998) : Frequencies of Musical Notes ° Physics Department, Michigan Technological University，2022 年 6 月 20 取自 <https://pages.mtu.edu/~suits/notefreqs.html>
3. 官大為 (2015): 一次搞懂「泛音列」!，2022 年 6 月 13 取自 <https://youtu.be/0iJmDhNocaQ>
4. 周祥順 (2019) : 小巧的音樂盒暗藏玄機——共振駐波，2022 年 6 月 13 取自
<https://scitechvista.nat.gov.tw/Article/C000008/detail?ID=80e2730a-4dad-4471-9b50-4e535cfff1f71>
5. 姚珩主編 (2020) : 選修物理 III 全一冊。台南市：翰林出版