

2023 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

普高組 成果報告表單

題目名稱：
一、摘要
本研究利用音叉在水波槽中的震動引發水面產生毛細波，毛細波相當於反射式光柵，我們使用雷射光照射毛細波產生繞射條紋，錄影下來匯入 Tracker 軟體分析條紋間距，即可測量出毛細波的波長。從本研究當中也可明確觀察到毛細波的色散性，波長會隨著頻率而改變。此外我們使用不同頻率的音叉做實驗，利用頻率對波長的關係，精準計算出水的表面張力，開發新的表面張力測量技術。最後，我們再利用震幅隨距離衰減的關係，求出甘油的黏滯係數。
二、探究題目與動機
一般而言，物理課本中出現的波都是單波長的波，長相是正弦函數，但自然界大部分的波其實都有色散性(波速隨頻率變化)，所以長相會是波包的樣子。其中水波是日常最容易被觀察的對象，我們查詢資料後發現以表面張力主導的水波簡稱為毛細波，研究過程中，我們想到可以將毛細波的理论公式結合曾在課本上學到的光學繞射知識，將毛細波當作反射式光柵，再用雷射光進行繞射，這樣的作法或許可量測出毛細波的波長，於是在這個基礎上我們延伸出一系列的高精準度的實驗。
三、探究目的與假設
一、設計簡易方法測量毛細波的波長。 二、觀察毛細波振幅隨時間的衰減情形。 三、利用繞射技術測量水的表面張力。 四、利用振幅的衰減測量甘油的黏滯係數。
四、探究方法與驗證步驟
一、探究流程
<pre>graph LR; A[毛細波的原理] --- B[實驗架設]; A --- C[高幀數錄影設備]; A --- D[Tracker 分析]; E[反射式光柵] --- B; E --- C; E --- D; D --- F[毛細波的波長]; D --- G[毛細波的色散性]; D --- H[水的表面張力]; D --- I[液體的黏滯係數];</pre>

二、毛細波、反射式光柵、雷射光繞射原理

(一)毛細波原理

1. 水波槽中的水波由表面張力和重力所影響，我們已知在波長 λ 小於 1.7cm 的狀況下是以表面張力為恢復力的毛細波，波速 $v = \sqrt{2\pi\gamma/\rho\lambda}$ (ρ 為液體密度、 γ 為表面張力)。
2. 毛細波的頻率 f 、角頻率 $2\pi f$ 、波數 $k=2\pi/\lambda$ ，相速度 $v_p = \sqrt{2\pi\gamma/\rho\lambda} = f\lambda = \omega/k$ 。
毛細波有色散性，行進的過程中會以波包的形式傳遞，經微分推導後得群速度 $V_g=1.5f\lambda$ 。

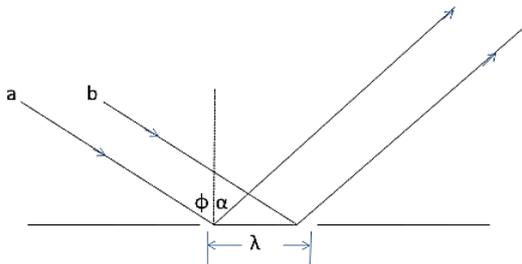
(二)反射式光柵原理

波長 Λ 的平行光照射間距 λ 的反射式光柵，如圖一所示。入射光 a、b 的光程差 $\lambda \sin \phi - \lambda \sin \alpha$ 在屏上產生亮紋的條件為 $\lambda \sin \phi - \lambda \sin \alpha = m\Lambda$ ， $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 。

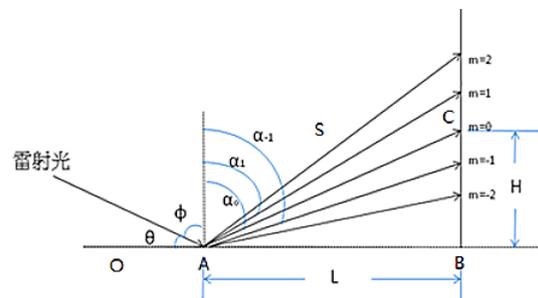
(三)雷射光繞射原理

鋼絲振源在水面的 A 點左方 O 振動，由振源向外傳播毛細波，波長 Λ 的雷射光以掠射角 θ 照射水面上的 A 點，如圖二所示。毛細波相當於反射式光柵，使繞射光在屏上呈現繞射亮紋。 $m=1$ 的第一主極大亮紋和 A 點連線和法線夾角 α_1 。 $m=-1$ 的另一個第一主極大亮紋和 A 點連線和法線夾角 α_{-1} 。令 $\delta = \alpha_0 - \alpha_1 = \alpha_{-1} - \alpha_0$ ，經推導後得

$$\Lambda = \lambda \sin \frac{\delta}{2} \left[\sin\left(\theta + \frac{\delta}{2}\right) + \sin\left(\theta - \frac{\delta}{2}\right) \right]$$

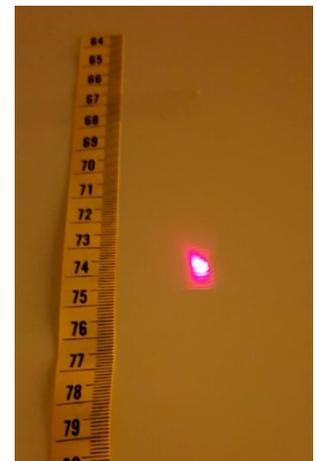


圖一：反射式光柵



圖二：雷射光照射毛細波的繞射

三、實驗器材圖



四、實驗探討

(一)實驗一：設計簡易方法測量毛細波的波長。

1. 實驗步驟：

- (1) 鐵盒加入蒸餾水，水深 2 公分。將音叉固定到鐵夾上，記錄振動頻率 f (480Hz)。
- (2) 打開雷射射向水面，掠射角 θ 。注意光束路徑不可碰到容器邊緣。
- (3) 輕敲音叉，錄下毛細波產生的繞射影像。
- (4) 關閉攝影機，水面平靜時，雷射光照射到 A 點做記號，量 AB、BC。
- (5) 將影片存入電腦，並用 Tracker 軟體播放並分析繞射亮點數、亮帶寬度。

2. 實驗的改良過程：因本實驗為精密的光學實驗，各器材需保持獨立，避免受震動影響。

- (1) 雷射筆和音叉要架設在不同的鐵架上。
- (2) 音叉的鐵架和鐵盤很近，所以音叉振動時可能會導致水波槽些微震動。所以我們將實驗架設改到大理石桌上做實驗。
- (3) 水波在行進過程中如果遇到鐵盤邊緣，會產生反射，則繞射亮紋就不是完美的毛細波造成，於是我們想辦法把鐵絲的位置移近鐵盤中央。
- (4) 實驗原理是鐵絲撞擊水面產生毛細波，所以要確保鐵絲是垂直震動水面，不能有水平方向震動。鐵絲要綁緊音叉，避免鐵絲本身的自然震動。
- (5) 敲擊音叉時，盡量敲在面上，且敲擊時不可使鐵絲接觸到盤底，另外敲擊音叉時不能太大力，避免水面晃動產生氣泡使光點暈開。

3. 結果分析與探討：

水面上的點 A 到屏 B 的距離 $L = 344\text{cm}$ ，屏上的點 B 到 A 點的垂直距離 $H = 105\text{cm}$ 。 $\tan\theta = H/L = 0.31$ ， $\theta = 17$ 度， $S = 360\text{cm}$ 。

實驗量得中央亮紋和第一亮紋間距 $\Delta y = 0.634\text{ cm}$ ， $\delta = \Delta y/S = 0.0018$ 弧度，又雷射光波長 $\Lambda = 6328\text{\AA}$ ，我們由公式計算可得實驗的毛細波波長 $\lambda = 0.123\text{ cm}$ 。

由理論公式 $v = \sqrt{2\pi\gamma/\rho\lambda} = f\lambda$ 將 f 以 480Hz 代入求解方程式，得出 $\lambda = 0.121\text{ cm}$ ，和實驗結果高度吻合。

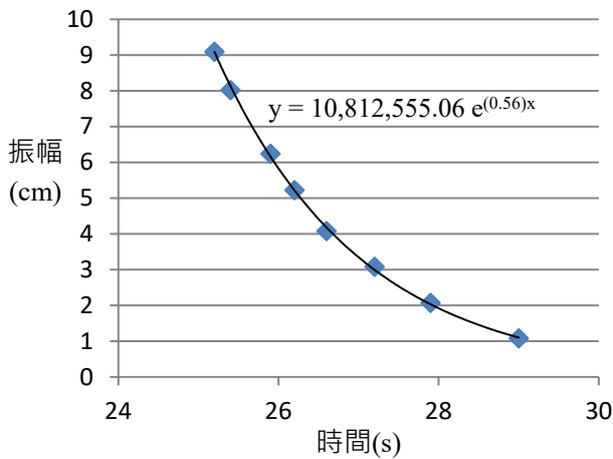
(二)實驗二：觀察毛細波振幅隨時間的衰減情形。

由影片擷取的毛細波產生的繞射圖樣，其振幅 (R)、繞射亮點數 (N)、及時間 (T) 記錄如表一所示。

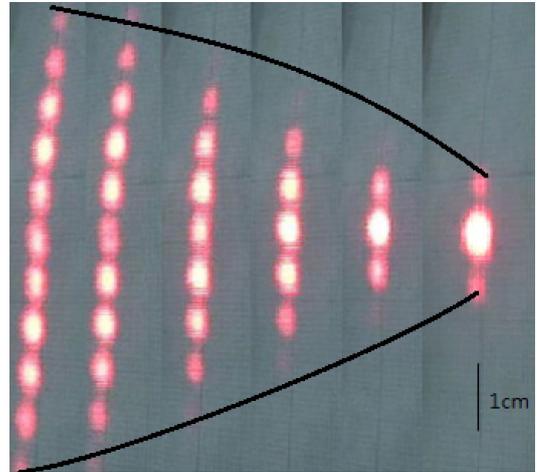
表一：振幅、繞射亮帶數隨時間關係

N	13	11	9	7	5	3	1
T(s)	25.4	25.9	26.2	26.6	27.2	27.9	29
R(cm)	8.02	6.24	5.22	4.08	3.08	2.07	1.08

振幅隨時間的變化，作圖可看出振幅隨時間呈指數函數衰減。這個現象的原因是我們知道毛細波屬於色散波，所以行進過程中以波包的形式傳遞，從實際振幅隨時間的變化圖，可以明顯觀察到波包的樣子(黑線)。



圖：振幅隨時間之關係



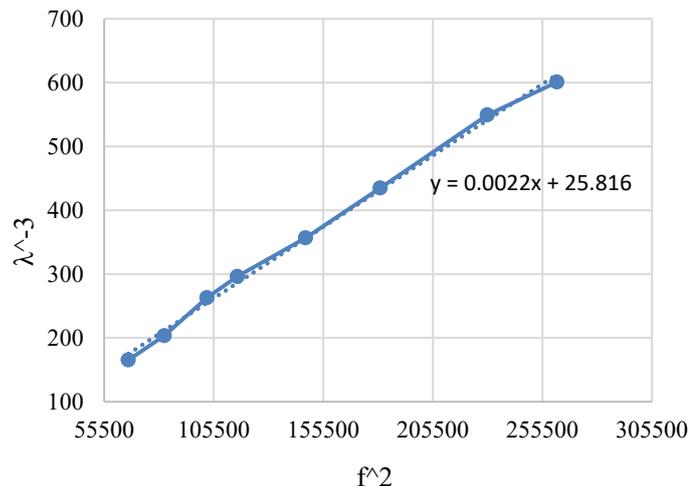
圖：振幅隨時間之關係

(三)實驗三：利用繞射技術測量水的表面張力。

我們使用八隻不同頻率 ($f=256、288、320、341.3、384、426.6、512\text{Hz}$) 的音叉連上鋼絲，分別作為振源，步驟和實驗一相同。水面上的點 A 到屏 B 的距離 $L = 312\text{cm}$ ，屏上的點 B 到屏 C 的距離 H 、亮紋間距 Δy 、以及算得的 λ 結果如表二所示。

表二：頻率與毛細波波長關係

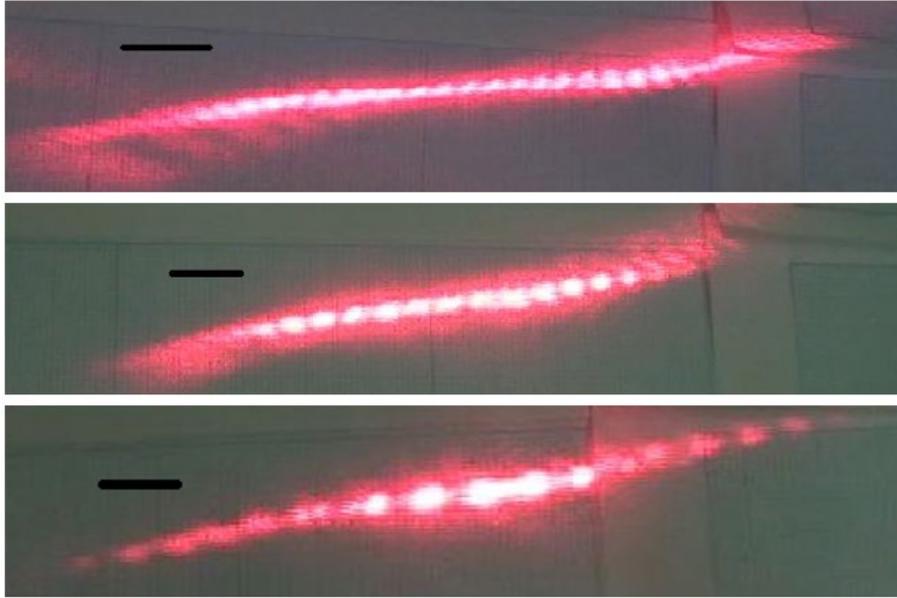
$\Delta y(\text{cm})$	$H(\text{cm})$	$\lambda(\text{cm})$
0.42	86.7	0.182
0.45	86.7	0.170
0.49	86.7	0.156
0.51	86.7	0.150
0.54	85.5	0.141
0.58	87	0.132
0.61	89.5	0.122
0.63	89.8	0.119



圖： $f^2、\lambda^{-3}$ 關係

由公式 $v = \sqrt{2\pi\gamma/\rho\lambda} = f\lambda$ 得到 $\lambda^{-3} = \rho/2\pi\gamma \times f^2$ ，因此我們可以從圖的斜率換算出表面張力。 $2.2 \times 10^{-3} = \rho/2\pi\gamma$ ，計算得溫度為 25°C 時，水的實驗表面張力 $\gamma = 72.3 \text{ dy/cm}$ ，而公認值為 72.75 dy/cm ，可見我們的實驗結果非常精準，我們用光學繞射的方法開發出從未有人使用過的新測量表面張力技術。

同時我們也發現，音叉頻率愈高，亮帶寬度 Δy 愈大，如圖所示，各圖中粗黑線段為 1cm。



圖：由上而下分別為 258 Hz、341 Hz、480 Hz

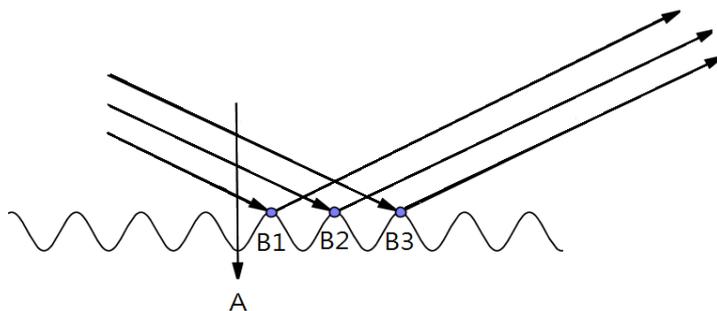
(四)實驗四：由毛細波振幅的衰減測量液體的黏滯係數。

1. 實驗原理:

- (1) 我們利用參考資料 5 的理論出發推導液體的黏滯係數: $a = a_0 e^{-\alpha x}$ 及 $\alpha = 2k^2 \mu / \rho v_g$ 。
- (2) 距離振源一定點定為參考點，其振幅 a_0 ，距參考點 x 處的振幅 a ，公式兩邊取對數 $\ln a = \ln a_0 - \alpha x$ ，將攝影機拍到 B1、B2、B3 三點的相對振幅以及位置，做 $\ln a - x$ 圖，由其斜率可得衰減係數 α 。
- (3) 我們在毛細波原理提過群速度 $V_g = 1.5 f \lambda$ ，將 α 代入得黏滯係數 $\mu = 3 \rho f \alpha \lambda^3 / 4 \pi^2$ 。

2. 實驗步驟：

- (1) 將三支雷射並排照射液面，照到水面的點離振源 A，依次為 B1、B2、B3。
- (2) 取 5% 的甘油水溶液放入壓克力盒中作實驗，並用實驗一作法測量出毛細波的波長。
- (3) 取三支雷射並排照射水面，使其和振源 A 分別距離 0.5、1.0、1.5cm。音叉振動時，拍攝屏上毛細波的振幅圖樣。
- (4) 改用 10%、15%、20% 的甘油水溶液作實驗。



圖：三支雷射示意圖

3. 實驗結果

表三:甘油水溶液的黏滯係數 (實驗音叉頻率 512Hz)

甘油水溶液	$\rho(g/cm^3)$	$\lambda(cm)$	α	$\mu(cm^2/s)$
5%	1.01	0.120	16.7	1.14
10%	1.02	0.118	20.0	1.31
15%	1.03	0.114	25.5	1.52
20%	1.04	0.110	32.7	1.77

五、結論與生活應用

一、研究結論

- (一) 我們利用毛細波作為反射式光柵的原理，藉由繞射條紋亮帶寬度推知毛細波波長。
- (二) 毛細波是色散波，由本研究可看出水波波長隨頻率改變的色散性，以及波包的長相。
- (三) 我們利用不同頻率的音叉產生毛細波，分析作圖後可精確算出水的表面張力，可開發為全新的測量技術。
- (四) 本實驗可測得水波振幅因黏滯力作用而衰減，利用振幅隨位置的變化求出甘油的黏滯係數。

二、應用

目前海域地形觀測的方法以聲學量測技術為主，海上作業需要搭配船艦來執行，所耗費之成本很可觀。台灣的近海水文中心發展出一種微波的 X-Band 雷達回波解算近岸海域地形的的方法，透過波浪迎波面與背波面水粒子運動方向之差異，造成迎波面上毛細波的輻合效應，而在背波面上會產生輻散效應。這些海面上的毛細波就是 X-band 電磁波產生布拉格散射的主因，在特定波長下會產生較強烈的電磁波散射，這可增進 X-Band 雷達技術。這個技術的原理恰好與我們的研究相關，只不過我們使用的是可見光，因此未來若更深入的研究水波槽內毛細波的運動情形，或許可提供為一種簡化的理論模型，應用在 X-Band 雷達技術上，強化它的測量精準度。

參考資料

1. 光的干涉與繞射 (2022)。翰林出版社 高中選修物理 III, p.120-p.151。
2. Weisbuch. G., Garbay. F. (1979). LightScattering by Surface Tension Waves. American Journal of Physics, v47 n4 p355-56 Apr.
3. Jun Dong, Jianxia Qi, Runcai Miao, Braz. J. (2007). Measurement of the damping of liquid surface wave by diffraction method. Phys. vol.37 no.3b São Paulo Sept.
4. David Halliday, Robert Resnick. Principle of Physics Extended, 9th Ed.
5. F. Behroozi. (2004). Fluid viscosity and the attenuation of surface waves: a derivation based on conservation of energy. Eur. J. Phys. 25 115–122.
6. 吳立中，馬家麟，賴堅戊，王良生 (2022)。利用微波雷達回波反算近岸海域地形。Vol. 49, No. 6 December 2022 土木水利 第四十九卷 第六期。