

二位數乘以二位數(印度式數學)的探討

作者:蔡光龍

壹. 探討目的:

1. 曾經因為建構式數學的影響，造成老師對於數學乘法的教學產生莫名的困擾，將從此改觀。
2. 減少計算的錯誤，減輕學生對於數學的恐懼。
3. 因為計算能力快速又正確，所以計算能力提升學生對數學的興趣，進而喜歡上數學。

貳. 探討方法:

1. 因為每個位值代表不同的數量，個拾佰仟萬它們的數量都不一樣。

萬位	仟位	百位	十位	個位
----	----	----	----	----

2. 同樣是『1』，但是他們所代表數量都不一樣。每一個左側的『1』是緊鄰右側的『1』的十倍，說明如下：
3. 1 萬是等於 10000
4. 1 千是等於 1000
5. 1 百等於=100
6. 1 十等於=10
7. 1 個是=1
8. 1 萬等於 10 個 1 千； 1 千等於 10 個 1 百；1 百等於 10 個 1。

9. 也就是 $10000=10\times1000$; $1000=10\times100$; $100=10\times10$; $10=10\times1$ 。

10. 九九乘法表會背誦，加強它的運用。

11. 熟捻九九乘法表，提升運算速度。

12. 認識二位數乘以一位數的意境。

$$I. (a\times10+b)\times c = a\times c\times10 + b\times c\times1$$

$$\text{範例: } 86\times7 = (8\times10+6\times1)\times7 = 8\times7\times10 + 6\times1\times7\times1 = 56\times10 + 42\times1 = 602$$

	萬位	仟位	百位	十位	個位
				8	6
×					7
			5	6	0
				4	2
			6	3	2

$$8\times7\times10=560$$

$$6\times7\times1=42$$

$$560+42=602$$

13. 什麼是二位數乘以二位數，它的意思什麼。

$$\text{如: } (a\times10+b)\times(c\times10+d) = a\times c\times100 + (a\times d + b\times c)\times10 + b\times d\times1$$

$$\text{範例 I: } 86\times75 = (8\times10+6\times1)\times(7\times10+5\times1) = 8\times7\times100 + (8\times5 + 7\times6)\times10 + 5\times6\times1$$

$$86 \times 75 = 56 \times 100 + (40 + 42) \times 10 + 30 \times 1 = 6450$$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				8	6	
×				7	5	
		5	6	0	0	$8 \times 7 \times 100 = 5600$
			4	0	0	$8 \times 10 \times 5 = 400$
			4	2	0	$7 \times 10 \times 6 = 420$
				3	0	$5 \times 6 \times 1 = 30$
		6	4	5	0	$5600 + 400 + 420 + 30 = 6450$

範例 II. $26 \times 84 = 16 \times 100 + (48 + 8) \times 10 + 24 \times 1 = 2184$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				2	6	
×				8	4	
		1	6	0	0	$2 \times 8 \times 100 = 1600$
			0	8	0	$2 \times 10 \times 4 = 80$
			4	8	0	$8 \times 10 \times 6 = 480$
				2	4	$6 \times 4 \times 1 = 24$
		2	1	8	4	$1600 + 80 + 480 + 24 = 2184$

$$26 \times 84 = 16 \times 100 + (48 + 8) \times 10 + 24 \times 1 = 2184$$

範例 III. $64 \times 87 = 1 = 48 \times 100 + (32 + 42) \times 10 + 28 \times 1 = 5568$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				6	4	
×				8	7	
		4	8	0	0	$8 \times 6 \times 100 = 4800$
			4	2	0	$6 \times 10 \times 7 = 420$
			3	2	0	$8 \times 10 \times 4 = 320$
				2	8	$4 \times 7 \times 1 = 28$
		5	5	6	8	$4800 + 420 + 320 + 28 = 5568$

14. 特殊案例：十位數相同且個位數的總合為 10

範例： $(ax10+b) \times (cx10+d)$ 題目中 $a=c$ 且 $b+c=10$

計算如下：

$$(ax10+b) \times (cx10+d) = (a+1) \times cx100 + b \times d \times 1 = (a+1) \times ax100 + b \times d \times 1$$

$$I. 86 \times 84 = (8+1) \times 8 \times 100 + 6 \times 4 \times 1 = 7224$$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				8	6	
×				8	4	
		7	2	0	0	$(8+1) \times 8 \times 100 = 7200$
				2	4	$6 \times 4 \times 1 = 24$
		7	2	2	4	$7200 + 24 = 7224$

$$II. 28 \times 22 = (2+1) \times 2 \times 100 + 2 \times 8 \times 1 = 616$$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				2	8	
×				2	2	
			6	0	0	$(2+1) \times 2 \times 100 = 800$
				1	6	$8 \times 2 \times 1 = 16$
			6	1	6	$800 + 16 = 816$

$$\text{III. } 95 \times 95 = (9+1) \times 9 \times 100 + 5 \times 5 \times 1 = 9025$$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				9	5	
×				9	5	
		9	0	0	0	$(9+1) \times 9 \times 100 = 9000$
				2	5	$5 \times 5 \times 1 = 25$
		9	0	2	5	$90 + 25 = 9025$

參. 探討結論:

1. 重中之重，必須強調每個位值代表不同的數量，個拾佰仟萬它們的數量都不一樣，計算式中每個數字要擺放在正確的位置，向右(個位)對齊。
2. 計算式中，每個空格都有一個數，沒有數字的空格補上『0』。
3. 高位數字是『0』沒有意義，就不做填補的工作。

肆. 延伸:

1. 三位數乘以二位數是不是依然可遵循如此的計算是計算呢?

如: $(ax100+bx10+c) \times (dx10+e)$ 題目中計算如下:

$$(ax100+bx10+c) \times (dx10+e) = (ax100 \times dx10) + (ax100 \times e + bx10 \times dx10) + (bx10 \times e + c \times dx10 + c \times e)$$

範例 I : $686 \times 57 = (6 \times 100 + 8 \times 10 + 6 \times 1) \times (5 \times 10 + 7 \times 1) = 39102$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
			6	8	6	
×				5	7	
	3	0	0	0	0	$6 \times 100 \times 5 \times 10 = 30000$
		4	0	0	0	$8 \times 10 \times 5 \times 10 = 1800$
		4	2	0	0	$6 \times 100 \times 7 \times 1 = 4200$
			3	0	0	$5 \times 10 \times 6 \times 1 = 300$
			5	6	0	$8 \times 10 \times 7 \times 1 = 560$
				4	2	$6 \times 1 \times 7 \times 1 = 42$
	3	9	1	0	2	

範例 II. $738 \times 66 = (7 \times 100 + 3 \times 10 + 8 \times 1) \times (6 \times 10 + 6 \times 1) = 48708$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
			7	3	8	
×				6	6	
	4	2	0	0	0	$7 \times 100 \times 6 \times 10 = 42000$
		1	8	0	0	$3 \times 10 \times 6 \times 10 = 1800$
		4	2	0	0	$7 \times 100 \times 6 \times 1 = 4200$
			1	8	0	$3 \times 10 \times 6 \times 1 = 180$
			4	8	0	$6 \times 10 \times 8 \times 1 = 480$
				4	8	$6 \times 1 \times 8 \times 1 = 48$
	4	8	7	0	8	

範例Ⅲ. $903 \times 24 = (9 \times 100 + 0 \times 10 + 3 \times 1) \times (2 \times 10 + 4 \times 1) = 39102$

	萬位	仟位	百位	十位	個位	
			9	0	3	
×				2	4	
	1	8	0	0	0	$9 \times 2 \times 1000 = 18000$
		0	0	0	0	$0 \times 10 \times 2 \times 10 = 0$
		3	6	0	0	$9 \times 100 \times 4 \times 1 = 3600$
			0	0	0	$0 \times 10 \times 4 \times 1 = 0$
			0	6	0	$2 \times 10 \times 3 \times 1 = 60$
				1	2	$3 \times 1 \times 4 \times 1 = 12$
	2	1	6	7	2	

2. 三位數乘以三位數是不是也可遵循如此的計算是計算呢？

範例 I : $926 \times 517 = (9 \times 100 + 2 \times 10 + 6 \times 1) \times (5 \times 100 + 1 \times 10 + 7 \times 1) = 478742$

	十萬位	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				9	2	6	
×				5	1	7	
	4	5	0	0	0	0	$9 \times 100 \times 5 \times 100 = 450000$
			9	0	0	0	$9 \times 100 \times 1 \times 10 = 9000$
		1	0	0	0	0	$5 \times 100 \times 2 \times 10 = 10000$
			6	3	0	0	$9 \times 100 \times 7 \times 1 = 6300$
			3	0	0	0	$5 \times 100 \times 6 \times 1 = 3000$
				2	0	0	$2 \times 10 \times 1 \times 10 = 200$
				1	4	0	$2 \times 10 \times 7 \times 1 = 140$
					6	0	$1 \times 10 \times 6 \times 1 = 60$
					4	2	$6 \times 1 \times 7 \times 1 = 42$
	4	7	8	7	4	2	

範例 II. $738 \times 726 = (7 \times 100 + 3 \times 10 + 8 \times 1) \times (7 \times 100 + 2 \times 10 + 6 \times 1) = 48708$

	十萬位	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				7	3	8	
×				7	2	6	
	4	9	0	0	0	0	$7 \times 100 \times 7 \times 100 = 450000$
		2	1	0	0	0	$7 \times 100 \times 3 \times 10 = 21000$
		1	4	0	0	0	$2 \times 10 \times 7 \times 100 = 14000$
			5	6	0	0	$7 \times 100 \times 8 \times 1 = 5600$
			4	2	0	0	$6 \times 1 \times 7 \times 100 = 4200$
				6	0	0	$3 \times 10 \times 2 \times 10 = 600$
				1	6	0	$2 \times 10 \times 8 \times 1 = 160$
				1	8	0	$6 \times 1 \times 3 \times 10 = 180$
					4	8	$8 \times 1 \times 6 \times 1 = 48$
	5	3	5	7	8	8	

範例Ⅲ. $903 \times 624 = (9 \times 100 + 0 \times 10 + 3) \times (6 \times 100 + 2 \times 10 + 4) = 39102$

	十萬位	萬位	仟位	百位	十位	個位	
				9	0	3	
×				6	2	4	
	5	4	0	0	0	0	$9 \times 100 \times 6 \times 100 = 450000$
		1	8	0	0	0	$9 \times 100 \times 2 \times 10 = 18000$
		0	0	0	0	0	$6 \times 100 \times 0 \times 10 = 0$
			3	6	0	0	$9 \times 100 \times 4 \times 1 = 5600$
			1	8	0	0	$6 \times 100 \times 3 \times 1 = 1800$
					0	0	$0 \times 10 \times 4 \times 1 = 0$
					6	0	$3 \times 1 \times 2 \times 10 = 60$
					1	2	$3 \times 1 \times 4 \times 1 = 12$
	5	6	3	4	7	2	

伍. 研究討論：

1. 這個計算式是另一個“建構式”數學的一種方式。

2. 但是不好鼓勵使用在高位數乘以高位數。

3. 二位數乘以二位數是值得推廣。它的計算程序確實比傳統式的計算式快許多！自己常常練習，孰能生巧，一定能夠可以成為自己拿手計算式！

4. 例一 $86 \times 72 =$

					十位	百位	千位		
				8	6				
×				7	2				
	5	6							
		5	8						
			1	2					
	6	1	9	2					

備註
$8 \times 7 = 56$
$8 \times 2 = 16$; $7 \times 6 = 42$; $16 + 42 = 58$
$6 \times 2 = 12$

例二 $62 \times 98 =$

						備註	
		千位	百位	十位	個位		
				6	2		
	×			9	8		
		5	4			$6 \times 9 = 54$	
			6	6		$6 \times 8 = 48 ; 9 \times 2 = 18 ; 48 + 18 = 66$	
				1	6	$2 \times 8 = 16$	
		6	0	7	6		

例三 $59 \times 83 =$

例四 $28 \times 82 =$

千位 百位 十位 個位				
			5	9
			8	3
X				
	4	0	2	7
		1	5	
+		7	2	
	4	8	9	7

千位 百位 十位 個位				
			2	8
			8	2
X				
	1	6	1	6
		0	4	
+		6	4	
	2	2	9	6

