

# 2023 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

## 普高組 成果報告表單

題目名稱：配送最短路徑之科普研究

### 一、摘要

本研究想為地球盡一份力，打算從城市規劃中著手，便尋找相關且具實用價值的題目，藉由本年度 IMMC 的題目：機器人派送書籍的最短路徑節省耗電量。以高科技與永續發展為目標，組織團隊進行研究。IMMC 問題 A：「校園圖書館的智慧配送」一題，問題內容概要為在一社區內打算安置兩位機器人 (A 與 B)，作為巡邏機器人置於該社區斜對角，企圖幫助此社區居民完成到府借還書之工作。本題給予各項條件，例如：該社區內不同樓宇的借書與還書數、各棟樓宇的相對距離 (即各道路長) 以及兩台機器人之時速與負載上限。盼找出完成任務後返回充電站所耗費時間最短之路線圖。

### 二、探究題目與動機

1. 在現代的趨勢下，機器取代人工將在未來發生，而特別消耗能力的物流業，正是當今最需要自動化的工作之一。機器人會照著程式工程師的程式碼所規劃的路線運行，而路線該如何規劃才能達到較高的效率？本研究透過第九屆 IMMC 國際數學建模挑戰賽秋季賽 A 題取得機器人協助完成有限地圖內各樓宇有限數量的借還書問題，藉該賽題所給定之條件，建立適當的數學模型，完成路線規劃。並提出方法，以利解決類似應用問題。

### 一、探究目的與假設

1. 根據第九屆 IMMC 國際數學建模挑戰賽秋季賽 A 題資料「學校各建築與交通路線示意圖」(如圖 (一)) 建立數學模型，以確立機器人 A (右下角) 與機器人 B (左上角) 分別以 8 與 10 的速率去收集書籍 (各樓宇的借閱、還書需求如表 (一))。探討在該賽題條件下計算出的最佳路線 (花費時間最短，且完成所有還書需求)。
2. 接續研究目的 (一)，將其討論條件再加入賽題給予的各樓宇的借書需求，探討整體條件下所花費的最短時間。並評估其優缺點。



圖 (一) 學校各建築與交通路線示意圖

#### 四、探究方法與驗證步驟

##### 一、原題

大學開啟了智慧校園系統的建設。校園圖書館為了方便師生借閱和及時歸還圖書，上線了智慧圖書配送模塊，通過配送機器人進行圖書的歸還回收和借閱發放。具體做法如下：

- (一) 現有配送機器人 A 和 B 分別從充電駐地出發 (出發前均未裝載書本)，隨後將圖書帶回圖書館，再出發回收還書發放借書，不需要

考慮各機器人各樓宇內取書所花的時間，也不必考慮行駛途中相遇而互換圖書。

- (二) 在完成圖書館委派的任務後，配送機器人須返回

各自初始出發的駐地進行充電。

- (三) 每個樓宇的位置和道路實際距離分別如圖 (一) 和表 (二) 所示。每個配送機器人最多可裝載 10 本書。配送機器人 A 的平均行駛速度是 8 公里/小時，配送機器人 B 的平均行駛速度是 10 公里/小時。

##### 二、Excel 規劃求解

本模型採用規劃求解的方式，將本研究轉換成供需平衡型的運輸問題，本研究以表 (四) 進行說明：表(四) 假定有 3 個供應商，有四棟樓宇有運輸貨品的需求，其需求橫列表示各樓宇的總需求量，其供應直行表示各供應商的總供應量。其餘 12 個儲存格表示各供應商運送貨品到各樓宇的運輸成本，由於總供應量與總需求量相同，因此稱為供需平衡型的運輸問題。透過 Excel 規劃求解，求出完成此運輸任務的最小成本。若寫成數學式即

表 (一) 各樓宇還書量及借書量

樓宇名稱	還書數	借書數	樓宇名稱	還書數	借書數
四美樓	3	0	益學樓	4	0
芳鄰樓	4	1	朱華樓	2	3
凌云樓	2	0	綠竹樓	5	0
遠山樓	5	2	沉璧樓	6	0
重霄樓	6	0	雅學樓	5	2
北辰樓	6	2	朝暉樓	3	0
弼津樓	5	0	流丹樓	8	0
映雪樓	2	0	俊采樓	3	0
高洁樓	4	0	汀兰樓	6	2
南溟樓	3	1	蘭亭樓	2	0
長洲樓	6	0	郁青樓	3	0
秋水樓	4	3	星輝樓	4	0
臨川樓	3	0	万千樓	2	2
景明樓	6	0	東隅樓	1	0
清風樓	2	0	長風樓	5	0
皓月樓	7	2			

表 (二) 各樓宇之間距離

道路名稱	實際距離 (km)										
崑崙路	0.6	雲南路	1.0	江西路	0.8	西藏路	0.7	安徽路	0.4	上海路	0.8
峨眉道	0.3	貴州路	0.6	廣東路	0.6	敦煌道	0.5	廣西路	0.5	浙江路	0.7
陝西路	1.1	恆山道	0.4	香港路	0.4	驢山道	1.2	澳門路	0.6	福建路	0.5
蜀山道	0.5	五台道	1.1	龍虎道	0.3	華山道	1.8	武當道	0.9	台灣路	0.3
青城道	0.8	山西路	2.2	泰山道	1.1	衡山道	0.8	嵩山道	0.4	齊雲道	0.4
新羅路	0.7	興山路	0.7	山東路	2.1	武陵道	1.0	廬山路	0.5	天柱道	0.9
甘肅路	0.6	華容道	1.0	武夷道	0.8	內蒙古路	0.7	中山路	0.6	雁蕩道	1.4
青海路	1.5	吉林路	0.5	嶽南道	1.1	湖北路	1.1	遼寧路	1.1	普陀道	0.6
寧夏路	1.7	河北路	0.7	黑龍江路	0.5	湖南路	1.3	天津路	0.6	終南道	0.5
四川路	2.0	河南路	1.0	北京路	0.9	重慶路	0.7	江蘇路	0.3		

表 (三) 各點與圖書館間最短距離及路徑對照表

point	return	borrow	distance <sub>20(library)</sub>	path				
1	X	X	4.4	7	13	18	19	20
2	6	2	4.2	8	14	19		
3	4	3	3.7	9	20			
4	7	2	4.2	3	9	20		
5	5	2	4.5	11	10	15		
6	3	0	4.6	12	17	22		
7	3	0	3.8	13	18	19		
8	5	0	3.7	14	19	20		
9	3	0	3.3	20				
10	4	0	3.6	15	20			
11	3	0	4.2	10	15	20		
12	4	0	4.2	17	22	21		
13	4	1	3.5	18	19	20		
14	2	0	2.5	19	20			
15	2	3	3.2	20				
16	8	0	3.3	21	20			
17	2	2	3.3	22	21	20		
18	2	0	2.4	19	20			
19	4	0	0.7	20				
21	3	0	1.2	20				
22	1	0	1.9	21	20			
23	5	2	2.9	18	19	20		
24	3	1	1.5	19	20			
25	6	0	0.7	20				
26	5	0	0.9	20				
27	6	2	1.5	26	20			
28	5	0	2	27	26	20		
29	6	0	3.7	23	18	19		
30	6	0	2.3	31	25	20		
31	2	0	1.7	25	20			
32	6	0	1.5	26	20			
33	2	0	1.9	32	26	20		
34	X	X	2.2	33	32	26	20	

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 16 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 22 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 8 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 14 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 12 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 14 \\ x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in N, i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right.$$

表 (四) 說明規劃求解

	北辰樓	秋水樓	四美樓	彌津樓	供應
供應商1	4	12	4	11	16
供應商2	2	10	3	9	10
供應商3	8	5	11	6	22
需求	8	14	12	14	48

其目標函數為：

$\min = 4x_{11} + 12x_{12} + 4x_{13} + 11x_{14} + 2x_{21} + 10x_{22} + 3x_{23} + 9x_{24} + 8x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 6x_{34}$  以本例而言，其 Excel 規劃求解的答案輸出為下表 (五)：

其解讀意義為供應商 1 提供北辰樓 4 個貨品、提供給四美樓 12 個貨品...。在了解規劃求解的解讀意義後，本模型即開始將全部 31 個點的需求進行求解。但由於 A、B 機器人除了第一步從各自充電站出發以外，爾後每一次出發都是由編號 20 出發。因此本研究將第一步視為「刪點」，意即 A、B 機器人先各自尋找一條路徑收集 10 本書後，返回圖書館後開始進行後續規劃求解的討論。由於賽題中還書的總需求量是 127 本，如第一步兩機器人各收走 10 本書 (或說盡可能接近 10 本)，即可將剩餘總需求量降低到 107 本 (小於等於 109 本)。由於每個機器人每次出發收書上限均為 10 本，本任務又是在執行計算最短時間，因此將任務著重在「出勤次數最少」是重要的觀點。基於以上理由，本研究每個模型都是以「出勤此數最少」為最高原則。然而，總需求量降低到小於等於 109 本，意即至少需出勤  $\left\lceil \frac{107 \sim 109}{10} \right\rceil + 1 = 11$  次。在 11 次的出勤前提下，本研究的每個模型重點都在於如何將收書的路徑找到，雖然兩機器人第一步出發時選擇收走哪些點的書也會對於總體路徑總長有所影響，但畢竟只有一開始的第一個步驟。而最終任務完成時，兩機器人都必須回到各自的充電站。這一部分的行走距離為定值，在表 (三) 可以看到編號 1 (B 的充電站) 與編號 20 (圖書館) 的最短距離為 4.4，而編號 34 (A 的充電站) 與編號 20 (圖書館) 的最短距離為 2.2，這兩段回各自充電站的路程是無可避免的分配給 B 與 A。因此模型的重點應放在如何將由編號 20 出發的 11 次出勤收書動作達到路徑總長最小是首要目標，後續該如何分配這 11 條路徑給 A、B 機器人執行，則是依照兩機器人的行走速率 4:5 的設定，將 11 條總路徑長分別找到各個路徑長度和為 11 條總路徑長的  $\frac{4}{9}$  分配給 A 機器人執行；將 11 條總路徑長分別找到各個路徑長度和為 11 條總路徑長的  $\frac{5}{9}$  分配給 B 機器人執行。以下開始進行 11 條路徑的規劃求解：

表 (五) Excel 規劃求解供需總表

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	10
20	4.2	3.7	4.2	4.5	4.6	3.8	3.7	3.3	3.6	4.2	4.2	3.5	2.5	3.2	3.3	3.3	2.4	0.7	1.2	1.9	2.9	1.5	0.7	0.9	1.5	2	3.7	2.3	1.7	1.5	1.9	8
	6	4	7	5	3	0	5	3	4	3	4	0	2	2	8	2	0	3	0	0	5	3	6	5	6	0	6	6	2	6	2	108

表 (五) 的最左側欄位即為編號 20，本模型將編號 20 視為供應商，且總共有 11 個相同的供應商。最下一列為各編號點的需求量，其中為 0 的點，包含 7、13、18、21、22、28。此因本模型設計 B 機器人出發的第一步收走了編號 7 (3 本)、13 (4 本)、18 (2 本)、19 (1 本)；A 機器人出發的第一步收走了編號 28 (5 本)、22 (1 本)、21 (3 本)。如此設定可以將總需求點從 31 個點降低至 25 個點，總需求與總供應平衡皆

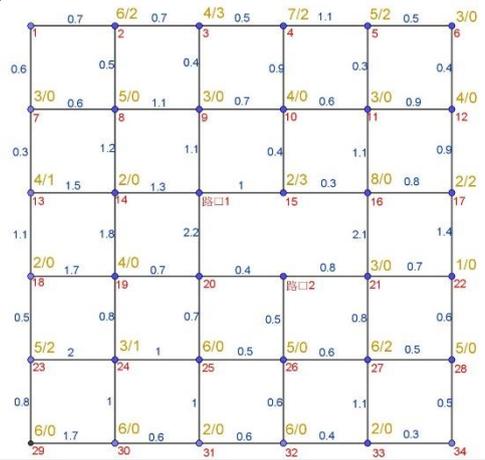


圖 (二) 各點間借還書需求與距離對照表

為 108 本。由於 11 個供應商皆為同一個，即「先不考慮速度快慢，先將路徑找到配置方法如何使得總長最短」為優先。如前述說明，待 11 條最短路徑長度和找到以後，再依照兩機器人的行走速率 4:5 的設定進行後續的路徑分配即可。因此表 (五) 中的其餘儲存格每一列皆相同，每個儲存格中的數值代表「成本」。本研究團隊認為，每個不同的點到圖書館的最短距離，即為每個點的運輸成本。因此儲存格中的每個數值乃是對照表 (五) 而得，且每列均相同。

在執行規劃求解過程時，本團隊發現 Excel 對於規劃求解的硬規定，即為處理的儲存格不得超過 200 個，依照上表 (五) 的登載方式，共計有  $11 \times 25 = 275$  個儲存格，超過了 Excel 規劃求解的硬上限。最終透過象限分割的方式得出，A 機器人總花費時間為 5.4625 小時；B 機器人花費時間為 5.44 小時。由於兩機器人同時開始執行任務，意即結束任務的時間點應是較晚執行完畢者之時間，才是任務結束的總花費時間，Excel 規劃求解的求解結果為 5.4625 小時。

### 三、總和配對法

本團隊提出了一套總和配對模型進行試算。其主思考邏輯與前述相同：大致上分為以下幾點：

- (一) 出勤次數最少。扣除兩機器人的第一動作外，從圖書館出發的總次數為 11 次。
- (二) 每次收書執行以 10 本收滿上限為原則。

(三) 收書過程中收鄰近方位的點，例如欲收編號 16，由於地圖上的路徑設計關係，同一路徑通過編號 15 將成為幾乎的必然。

(四) 每條路徑之最終收書終點位置，皆採表 (三) 的數據，憑藉最短路徑數據回到圖書館。

(五) 待 11 條路徑決定以後，最後再進行分配給 A、B 機器人的工作。

以圖書館為原點可分為：左上、右上、左下、右下。一開始機器人都是要邊收書邊走去圖書館，所以讓 B 走 7(3), 13(4), 18(2), 19(1)，A 走 33(2), 32(6), 31(2), 25(0)，雖然這樣 19 會遺留下 3 本書，25 會遺留 6 本書但這是到圖書館最短的路徑，所以選擇走這條。到圖書館後就要開始來回收拾了，由於左下每段的平均路程 (1.06) 和圖書館右下的平均路程 (0.62) 比起來較大，所以讓速率較快的 B 去走左下花費時間會較少，A 就去收右方的書。此時最左下四個格子的需取走書本量剛好為 20 本，所以 B 機器人可以兩次收完左下的書，路徑分別為：19(0), 24(3), 30(6), 29(1), 23(0), 24(0), 19(0)、19(0), 18(0), 23(0), 29(5), 23(5), 18(0), 19(0)，在經過 19 時都不收書，這樣到左下時才能拿 10 本回圖書館。同時 A 也在收書，路徑為路口 2(0), 26(0), 27(0), 28(5), 22(1), 17(2), 22(0), 21(0)，路口 2(0)，且只收點 28:5 本，點 22:1 本，17:2 本，因為點 21, 25, 26, 27 加起來剛好 20 本，之後可以兩次收掉。

原本的設定中，點 21, 25, 26, 27 是讓 A 機器人去收的，但後來發現這樣 A 機器人走的總路程大於 B 機器人的總路程太多，所以改成把這四個點的書交給 B 去回收，於是 B 就走出了以下兩條路徑：25(6), 26(4), 路口 2(0)；路口 2(0), 26(1), 27(6), 21(3), 路口 2(0)。A 去收點 15, 16 的書 (兩點加起來 10 本)，於是 A 的路徑為：路口 2(0), 21(0), 16(8), 15(2), 路口 2(0)。接下來還沒收的書就大致變成左上和右上了，且左上的平均路徑 (1.02) 和右上的平均路徑 (0.84) 比起來較大，所以 B 機器人去走左上所花時間會較少，但兩邊的書本數都很難湊成 10 本，所以他們應該收好較旁邊的書，較中間的書則互相幫忙，於是 B 機器人的路徑為：路口 1(0), 9(3), 3(1), 2(6), 8(0), 14(0), 19(0)、路口 1(0), 15(0), 10(2), 4(4), 3(3), 9(0)，路口 1(0)。A 機器人的路徑為：路口 2(0), 21(0), 16(0), 11(3), 10(2), 11(0), 5(5), 11(0), 16(0), 21(0)，路口 2(0)；路口 2(0), 21(0), 22(0), 17(0), 12(4), 6(3), 5(0), 4(3), 3(0), 9(0)，路口 1(0)。此時場上的書都已經收完了，於是兩台機器人就走最短路徑回充電站了，A 機器人：26(0), 32(0), 33(0), 34(0)，B 機器人：19(0), 18(0), 13(0), 7(0), 1(0)。由表(六)可知，總和配對法的求解結果為 5.0375 小時。其各條路徑分配示意圖如下表 (六)：

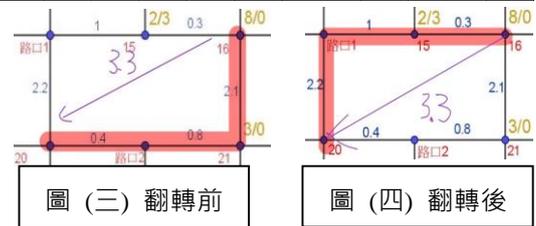
#### 四、研究目的 (二)

從上面的數學模型可得知最後一個作法花費時間最短，因此我們選擇把最後一個作法拿來進行修改，在修改的過程中，會發現只要稍微改一下順序就能在取書的過程中順便給書，像是把 A 走的路口 2(0), 21(0), 16(8), 15(2), 路口 1(0) 會使得 A 機器人在點 15 無法借出 3 本。但只要把順序改成：路口 1(0), 15(2), 16(8), 21(0), 路口 2(0)，如此一來便能在收點 15 的書時順便給它 3 本書。

在所有的借書需求中，所有的圖(三)路徑皆涵蓋到各點的借書需求，唯獨編號 21 有借書需求需要解決，而本研究發現，將圖 (三) 中的圖形進行小幅度的改寫，即將 L 型進行翻轉即可。如此一來，研究目的(二)的結果與研究目的(一)中的總和配對法完全相同。

表 (六) 總和配對法 路徑對照表

MODEL 3-3									
B機器人出發	b1	b7	b13	b18	b19	路徑長	4.4	花費時間	0.44
取書量	0	3	4	2	1				
路徑2	b24	b30	b29			路徑長	8.4	花費時間	0.84
取書量	3	6	1						
路徑3	b29	b23				路徑長	7.4	花費時間	0.74
取書量	5	5							
路徑4	b26	b27	b21			路徑長	3.5	花費時間	0.35
取書量	1	6	3						
路徑5	b9	b3	b2			路徑長	8.6	花費時間	0.86
取書量	3	1	6						
路徑6	b10	b4	b3			路徑長	8.7	花費時間	0.87
取書量	2	4	3						
路徑7	b25	b26				路徑長	2.1	花費時間	0.21
取書量	6	4							
路徑8	b19	b14	b8			路徑長	2.5	花費時間	0.25
取書量	3	2	5						
B機器人回充電站	b19	b18	b13	b7	b1	路徑長	4.4	花費時間	0.44
取書量	0	0	0	0	0				
A機器人出發	a34	a33	a32	a31		路徑長	3	花費時間	0.375
取書量	0	2	6	2					
路徑2	a28	a22	a17			路徑長	7.3	花費時間	0.9125
取書量	5	1	2						
路徑3	a16	a15				路徑長	6.8	花費時間	0.85
取書量	8	2							
路徑4	a11	a10	a5			路徑長	10.6	花費時間	1.325
取書量	3	2	5						
路徑5	a12	a6	a4			路徑長	10.4	花費時間	1.3
取書量	4	3	3						
A機器人回充電站	a26	a32	a33	a34		路徑長	2.2	花費時間	0.275
取書量	0	0	0	0					
兩機器人總花費時間(小時)	B	A				路徑總長	90.3		
	5	5.0375							



#### 五、結論與生活應用

做完這些數學模型後，本研究發現要不要借書對於總花費時間並沒有影響，但那只是對結果而言，各自的優缺點還是有的，在研究目的 (一) 的模型中，可以發現除了第一個和最後一個路徑以外，其他的路徑都是可以調換順序的，像是路口 2(0), 21(0), 16(8), 15(2), 路口 1(0) 可改成路口 1(0), 15(2), 16(8), 21(0), 路口 2(0) (逆時針變順時針)，但在研究目的 (二) 中的模型就只能使用路口 1(0), 15(2), 16(8), 21(0), 路口 2(0)，選擇性較少。

#### 參考資料

- [1] 水調床頭。Bilibili。利用 EXCEL 求解運輸規劃問題。取自 <https://www.bilibili.com/video/BV1WK411L7vh/>
- [2] 掛雲帆。運輸問題的數學模型。取自 <https://www.guayunfan.com/baike/221042.html>
- [3] 維基百科。Floyd-Warshall 算法。取自 <https://zh.wikipedia.org/zh-hant/Floyd-Warshall%E7%AE%97%E6%B3%95>
- [4] 鄧曉光、譚正中、春燕。Baidu 文庫。數學建模送貨線路設計問題。取自 <https://reurl.cc/nZ7WqD>
- [5] 蕩漾哥。Baidu。如何規劃設計物流配送最短路徑思考 (一)。取自 <https://baijiahao.baidu.com/s?id=1726333113529696985&wfr=spider&for=pc>