

高中(職)組 成果報告表單

題目名稱：空氣阻力係數的計算與球體飛行距離的預測

一、摘要：

這次的實驗我們要探討的是物體斜拋的預測，常常在打乒乓球或是羽球的時候。球總是會在最後減速並且壓線。藉由這次實驗，我們要探討空氣阻力對於物體的飛行距離影響大小，我們先準備了乒乓球，用自由落體的運動狀況計算空氣阻力常數，再預測並實際測試乒乓球斜拋的距離有多遠。

二、探究題目與動機

會想要探索斜拋預測是因為打球時球減慢壓線得分就很慶幸，但如果發生在自己身上就很懊惱了，所以了解了空氣阻力，以後被人家質疑是不是作弊也可以大聲跟他說是因為我了解物理的奧妙～！

三、探究目的與假設

1. 利用落體法計算乒乓球的空氣阻力係數。
2. 使乒乓球用固定角度、不同初速度進行斜拋並記錄飛行距離，接著再用已知的阻力係數計算出飛行距離預測值，然後比較實驗值與預測值是否吻合並提出比較結果的解釋方法。

在網路上查資料後發現阻力和速度的平方成正比，於是假設方程式為 $f = -kv^2$ ，先選擇一顆乒乓球作為實驗對象，在不改變速度以外的變因，我們想要求出乒乓球的阻力係數 k ，並利用之以預測乒乓球在某一初速度固定夾角的飛行距離。

四、探究方法與驗證步驟

一、研究方法與實驗器材：

研究方法：

本實驗一共分為兩部分：

(一) 用落體法計算乒乓球的空氣阻力係數的垂直落地實驗

(二) 利用空氣阻力係數預測乒乓球飛行距離的斜向拋射實驗。

實驗器材：

鐵架、自製軌道、乒乓球、長尺、光電計時器、木塊、量角器、膠帶。



圖一



圖二

二、垂直落地實驗：

本實驗的目的是求出乒乓球的阻力係數 k ，我們採用垂直落地法。因為物體

在掉落時並非自由落體，而會受到空氣阻力的影響，所以我們可以利用

測量乒乓球掉落的初速度(0 公尺每秒)、掉落起始位置(1 公尺高)、

末速度(利用光電計時器量測)、掉落所經時間 (利用光電計時器量測)

和乒乓球重量，推導速度對位移的函式並將以上測量值帶入來求球出空

氣阻力常數(推導如下)。在得知空氣阻力係數後，我們可以將之用在斜向拋射實驗。

今空氣阻力 $f = kV^2$ 乒乓球 m 以初速 $V_0 = 0$ 在有空阻下掉落，求 $V(x)$ (技：用 $\frac{dx}{dt}$ 代換 dt ， $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot V$)

$$1^\circ \frac{dV}{dt} = a = g - \frac{kV^2}{m} \quad \text{--- ①}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{g - \frac{k}{m}V^2} = dt = \frac{dx}{V} \quad \text{--- ②}$$

$$2^\circ a = \frac{mg - kV^2}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot V = \frac{\frac{1}{2}dV^2}{dx} \quad \text{--- ③}$$

由①、③得

$$g - \frac{k}{m}V^2 = \frac{\frac{1}{2}dV^2}{dx} \quad \text{--- ④}$$

$$3^\circ \frac{1}{2}dU = g - \frac{k}{m}V^2 \quad \text{--- ⑤}$$

$$\therefore \frac{dU}{dV^2} = -\frac{k}{m} \Rightarrow dV^2 = -\frac{m}{k}dU \quad \text{--- ⑥}$$

④、⑥得

$$U = \frac{\frac{1}{2}dV^2}{dx} \quad \text{--- ⑦} \Rightarrow U = \frac{\frac{1}{2}dU \cdot (-\frac{m}{k})}{dx}$$

$$\text{得 } \frac{dU}{dx} = -\frac{2k}{m}U \quad \text{--- ⑧}$$

$$4^\circ \frac{1}{2}U = Ae^{ax} \text{ 代入 ⑧}$$

$$Aae^{ax} = -\frac{2k}{m}Ae^{ax} \Rightarrow a = -\frac{2k}{m}$$

$$\Rightarrow U = Ae^{-\frac{2k}{m}x} \quad \text{--- ⑨}$$

$$5^\circ \text{ 當 } x=0 \Rightarrow V_0=0 \text{ 代入 ⑨}$$

$$x=0, V_0=0 \Rightarrow 0^2 = g - \frac{k}{m} \cdot 0^2 = U = Ae^{-\frac{2k}{m} \cdot 0} = A \cdot e^0$$

$$\therefore g = A$$

$$\text{得 } U = ge^{-\frac{2k}{m}x} = g - \frac{k}{m}V^2 \quad \text{--- ⑩}$$

6. congratulations!

⇒ 整理 ⑩

$$\frac{k}{m}V^2 = g(1 - e^{-\frac{2k}{m}x})$$

$$V^2 = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{2k}{m}x})$$

$$\Rightarrow V(x) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left(1 - e^{-\frac{2k}{m}x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Q.E.D. ✖

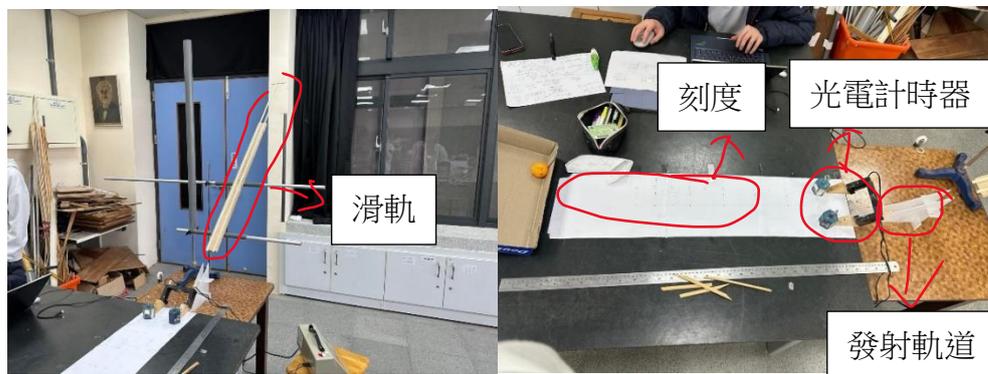
實驗架設與步驟如下：

1. 量測離地高 1 公尺處並定義之為乒乓球掉落起始點
2. 將乒乓球從起始點以初速度 0 掉落，紀錄掉落時間、末速度

3. 重複多次後取平均值，帶入速度對位移的函式並計算出空氣阻力係數

三、斜向拋射實驗：

利用鐵架固定好自製軌道，將光電計時器 45 度斜放並用木塊膠帶支撐以計算初速度，用筆在桌子上製作刻度，將球放在軌道上端並放開，球會在軌道末端以 45 度發射，在此處同時量測發射初速度，並且用慢速攝影機拍攝乒乓球，再根據桌子上的刻度得出乒乓球落下時距離出發點的距離並記錄。



圖三

圖四

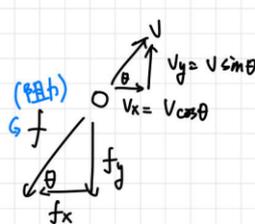
四、斜向拋射預測

二維情況的微分方程較為複雜，我們想出利用程式來模擬物理運動狀況的方法，輸入發射時的角度、初速、阻力係數(垂直落地實驗得出的)，電腦依序循環執行：

- 1、設定極短的單位時間 dt ，在這裡是 0.001 秒
- 2、依據原始速度更新 xy 方向的加速度
- 3、新的速度 = 原始速度 + (加速度 * dt)
- 4、新的位置 = 原始位置 + (新的速度 * dt)

直到物體 y 座標小於 0。

在這裡 xy 分量分開計算，如下：

$$f_{\text{阻力}} = -kV^2 \quad \leftarrow \text{速度量值}$$


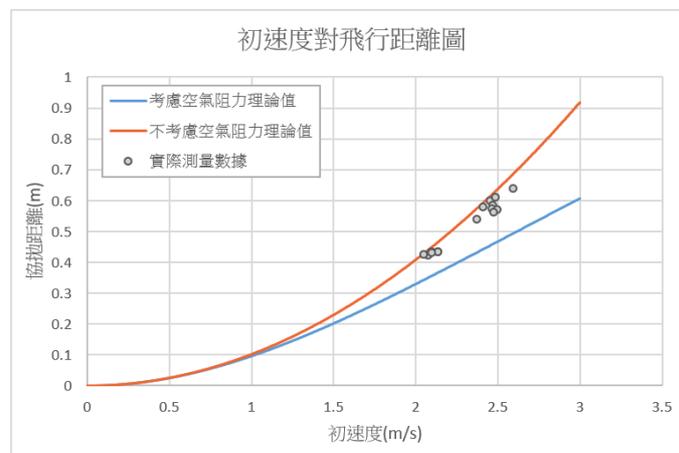
(x 方向合力)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow F_x &= f_x = f \cos \theta \\ &= -kV^2 \cos \theta \\ &= -kVV_x \end{aligned}$$

(y 方向合力)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow F_y &= -mg + f_y \\ &= -mg - kVV_y \end{aligned}$$

以下是我們的實驗結果。



發射初速度對斜拋距離關係圖

作圖後顯示結果更靠近沒有空氣阻力的理論值，推斷是因為乒乓球所受阻力對最後落點的影響相較於實驗的誤差是很小的，由於我們加速乒乓球的裝置是自製軌道，實驗的限制導致我們無法製造足夠快的球速並觀察初速度更大時數據的分布，我們的數據集中，說明我們的軌道可以確保球以穩定的速度飛出，因此我們認為裝置是實驗結果不符合預期的主因，以下是需要改良的地方：

1. 初速度的測量

我們測量初速度使用的是光電計時器以兩個感測器緊貼測量 (圖三)，兩個感測器間距除以通過所花的時間，但是有可能因為球體並非垂直通過閘門，所以球在通過計時器時移動的距離會比兩個感測器的垂直距離還要長，從而導致低估了球的速度。

2. 乒乓球的旋轉

乒乓球射出時可能帶有些許的旋轉，導致球體飄移，測量的垂直位移就會有偏差。

3. 未排除空氣擾動

我們選擇的實驗對象是乒乓球，質量太輕容易受到風的影響，未來實驗可以考慮用更重的球進行實驗。

五、結論與生活應用

物體在運動時，大部分都會受到摩擦力的作用，空氣阻力就是最常見的一種形式。雖然此實驗的空氣阻力有些許的不足，導致有空阻的實驗值、無空阻的理論值和預測值極度接近，但空阻的實驗值和預測值趨勢是吻合的。在經過本次實驗後，我們了解如何測量空氣阻力係數並用於預測物體的飛行距離，我們認為著個成功的經驗可以運用在線上遊戲的物理運算中，在廠商設計遊戲如迷你高爾夫時，就可以事先量測高爾夫球的空氣阻力係數，並計算出高爾夫球在不同情況下的實際飛行距離與路徑，再計算結果加入遊戲中，就可以使遊戲內容更逼真。

參考資料

1. 丁同仁, & 李承治. (2004). *常微分方程* (Vol. 7). 北京: 高等教育出版社.
2. 马知恩, 周义仓, & 李承治. (2001). *常微分方程定性方法与稳定性方法* (Vol. 85). 科学出版社.
3. 王立华. (2000). 空气阻力对自由落体运动的影响. *沧州师范学院学报*, 16(2), 50-52.
4. Mohazzabi, P. (2011). When does air resistance become significant in free fall?. *The Physics Teacher*, 49(2), 89-90.